1. Основные понятия теории обыкновенных ДУ. ДУ 1-го порядка (с разделяющимися переменными, однородные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель).

ДУ называются уравнения, содержащие независимые переменные, искомые функции этих переменных и производные этих функций.

Обыкновенное ДУ – уравнение, в котором неизвестные функции зависят только от одной независимой переменной.

ДУ с частными производными – уравнения, содержащие частные производные искомой функции.

Обыкновенное ДУ n-го порядка называется соотношение вида:

(1)

F – известная функция своих аргументов; x – независимая переменная; y(x) – неизвестная функция.

Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется порядком ДУ.

Функция y = называется решением ДУ, если после подстановки ее в уравнение, уравнение превращается в тождество.

Если уравнение представлено в виде разрешенного относительно старшей производной, то такой вид называется ДУ в нормальной форме:

(2)

Для того, чтобы выделить единственное решение ДУ необходимо задавать дополнительные условия. Если дополнительные условия задаются в одной точке, то их называют начальными условиями или условиями Коши.

ДУ с начальными условиями называют задачей Коши.

Если доп. Усл. Задаются в более чем одной точке, то их называют гармоничными. Уравнения с этими условиями называют краевой или граничной задачей.

Определение| Функция , где – произвольные постоянные, называют общим решением уравнения (1) и его общим интегралом, если при соответствующем выборе постоянных из него можно получить любое решение уравнения (1).

**Простейшие классы ДУ:**

1. Уравнения с разделяющимися переменными – уравнение вида:

где – известные функции; х- независимая переменная; у(х) – неизвестная функция.

Сначала рассмотрим алгебраическое уравнение:

, решение его будет решением уравнения

Рассмотрим :

1. Однородные уравнения – уравнения вида:

, решение такого ДУ можно найти с помощью замены:

Подставим получим соотношение между у и х, которое и будет решением Однородного уравнения.

1. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 (7)

Если левая часть уравнения (7) является полным дифференциалом некоторой функции двух переменных х и у, то уравнение (7) называется уравнением в полных дифференциалах.

Если M(x,y), N(x,y) – непрерывны вместе со своими частными производными , то необходимо и достаточно, для того, чтобы левая часть была полным дифференциалом некоторой функции, необходимо выполнение тождества (8).

Определение| Множитель, после умножения на который уравнение (7) становится уравнением в полных дифференциалах – называется интегрирующим множителем.

1. Линейные уравнения 1-го порядка.

Линейным ДУ называется уравнение вида:

, где a(x),b(x)- известные функции; x- независимая переменная; y(x)- неизвестная функция (1)

Если в (1) b(x) ≡ 0, то уравнение называют линейным однородным, иначе линейным неоднородным.

Для задания задачи Коши задаются доп. условия: (2)

Теорема. Пусть функции a(x),b(x) определены и непрерывны на , тогда и для любого промежутка решение задачи Коши (1) единственно и определено на интервале

Общее решение ЛНУ есть сумма общего решения ЛОУ (первое слагаемое) и частное решение НУ (второе слагаемое)

1. Лемма Гронуолла-Белмана.

Пусть функции u(t),α(t)>0, C = const >=0 непрерывны и неотрицательны при и пусть u удовлетворяет неравенству:

Тогда u также удовлетворяет неравенству:

1. Теорема о существовании и единственности (Пикара) для одного ДУ.

Рассмотрим ДУ вида:

(1) (2)

Определение. Функция f(x,y) удовлетворяет в области G условию Липшица по 2 аргументу с константой L, если для любых

Теорема. Пусть в области функция f(x,y) непрерывна по х и удовлетворяет условию Липшица по у, в любой замкнутой ограниченной области , содержащейся в G, тогда на оси Ох, для любой точки (x0,y0) из G найдется отрезок (a,b), содержащий x0 внутри, на котором существует единственное решение задачи (1),(2).

1. Теорема Пиано(без доказательства). Теорема о гладкости решения ДУ.

Рассмотрим ДУ вида:

(1) (2)

Теорема Пиано. Пусть функция f(x,y) определена, непрерывна и ограничена в некоторой области G, тогда в задаче (1),(2) существует по крайней мере одно решение.

Теорема Пикара и теорема Пиано являются локальными теоремами.

Теорема о гладкости решения ДУ. Если функция f(x,y) имеет непрерывные производные по x,y до Р-го порядка (Р≥0), то всякое решение уравнения (1) имеет непрерывные производные по х до (Р+1)-го порядка.

1. Теорема Пикара для систем.

Рассмотрим систему обыкновенных ДУ:

(1)

Где – известные функции своих аргументов; х – независимая переменная; – неизвестные функции.

Рассмотрим задачу Коши:

(2)

Предположим, что они заданы в некоторой области х – независимая переменная; – неизвестные функции,

Рассмотри вектор-функцию y(x)= , тогда вектор-функция y(x) дифференцируема в точке x0, если в этой точке дифференцируема каждая компонента этой вектор-функции.

Обозначим через , тогда вектор-функция f(x,y) - отображение области G пространства Rn+1 в пространство Rn.

Тогда векторная запись задачи (1),(2) имеет вид:

Определение. Вектор-функция f(x,y) удовлетворяет условию Липшеца по y с const = L в области , тогда (норма разности

Теорема Пикара для систем. Пусть в области вектор-функция f(x,y) - непрерывна по х и удовлетворяет условию Липшица по у в любой замкнутой ограниченной области , тогда для любой точки найдется отрезок [a,b], содержащий внутри, на котором существует единственное решение задачи (1),(2).

1. Теорема существования и единственности для линейных систем.

(1)

Рассмотрим задачу Коши:

Запишем в матричном виде и введем вектор-функцию:

Тогда задача Коши (1),(2) принимает вид:

(3)

Теорема существования и единственности для линейных систем. Пусть функция , при определены и непрерывны для , тогда , существует единственное решение задачи (1),(2) определенное на всем интервале .

8. Свойства решений линейных однородных систем (Теоремы 1,2,3)

(5)

*A(x)=*

Предполагаем, что aij(x), i= , всюду определенна и непрерывна x(α,β)

Пусть вектор функция y(1)(x)=, … y(m)(x)=, (6)

Является решением системы (5)

Теорема 1. Линейная комбинация решений линейной однородной системы (5).

, Ck=const , k=

Так же является решением этой системы

Определение. Вектор функции y(1)(x), … , y(m)(x) называются линейно зависимыми на интервале (a,b) если найдутся постоянные C1, …, Cn=const (не все равные 0), что линейная комбинация

когда x (a,b), в противном случае ЛНЗ

Определение. Определителем Вронского, построенный по вектор функциям y(1)(x), … , y(n)(x) называется определитель

W(x)=

Теорема 2. Если вектор функции y(1)(x), … , y(n)(x)-ЛЗ на интервале (a,b), то определитель Вронского построенный по этим векторам функциям тождественно 0

Теорема 3. Пусть вектор функции y(1)(x), … , y(n)(x) –решение системы (5), тогда если определитель Вронского построенный по этим решениям обращается в 0 в некоторой точке x0(α,β) , то эти решения будут ЛЗ на промежутке (α,β)

Следствие. Если определитель Вронского построенный по решениям системы (5) обращается в 0 в некоторой точке т. То он тождественный 0

Замечание. Если вектор функции y(1)(x), … , y(n)(x) не являются решением системы (5) с непрерывным коэффициентом то Т.3 и следствие не верно.

Определение. Совокупность из n-ЛНЗ решений системы (5) называется её фундаментальной системой решений. 9. Свойства решений линейных однородных систем (Теоремы 4,5)

(5)

*A(x)=*

Теорема 4. Фундаментальная система решений у каждой линейной однородной системы (5)

Теорема 5. Общие решения линейной однородной системы (5)-ЛК с произвольными постоянными и ее фундаментальная система решений

10. Теорема Лиувилля для линейных систем.

(5)

*A(x)=*

Пусть вектор функция y(1)(\x), … , y(n)(x) – какое то решение системы (5), а W(x)-построенный по этим векторам определитель Вронского

W(x)=, тогда определитель Вронского будет решением след ДУ:

11. Фундаментальная матрица и её свойства.

(5)

*A(x)=*

1)Рассмотрим систему (5)

Пусть вектор функции y(1)(x), … , y(n)(x) –некоторые решения системы (5). То есть

2)Построим по этим решениям Y(x)- матрицу

Y(x)=,

Тогда если вектор функции y(1)(x), … , y(n)(x) – решение системы (5), то матрица Y(x) составленная по ним будет удовлетворять матричному уравнению

(7)

И обратно, если матрица Y(x)- решение матричного уравнения (7), то её столбцы будут решением системы (5)

Определение. Фундаментальной матрицей системы (5) называется решение матричного уравнения (7) не вырожденное хотя бы в одной точке

Свойства:

1)Фундаментальная матрица – невырожденная из всех x

2)Пусть Y(x)- фундаментальная матрица системы (5), а С= –вектор с постоянными компонентами, тогда вектор функция (8) –решение системы (5) и любое решение системы (5) можно представить в виде (8)

3)Пусть Y1(x)-фундаментальная матрица системы (5), а -невырожденная матрица с постоянными компонентами, тогда - будет фундаментальной матрицей системы (5)

4)Пусть Y1(x), Y2(x)-фундаментальные матрицы системы (5), тогда найдется постоянная невырожденная матрица С, что будет справедливо равенство (9)

12. Линейные неоднородные системы. Утверждение и следствие. Метод вариации произвольных постоянных.

Будем рассматривать следующую линейную неоднородную систему ДУ

(1)

И соответствующую ей линейную однородную систему

*(2)*

Где

f(x)=

Пусть вектор функция фи(x)- некоторое решение системы (1)

Утверждение. Любое решение системы (1) может быть представлено в виде

Где вектор функция V(x)- какое-то решение системы (2) и обратно вектор функция вида (3) будет решением системы (1)

Следствие. Любое решение системы (1) можно представить в виде

где y(k)(x), k= образуют фундаментальную систему решений системы (2), (С1, … , С2)- некоторые постоянные, y(x)-некоторое решение системы (1)

Другими словами, общее решение линейной неоднородной систем есть сумма общего решения соответствующей линейной однородной системы и частного решения системы (2)

**Метод вариации произвольных постоянных для неоднородных систем**

Рассмотрим задачу Коши:

(4)

Пусть известно общее решение соответствующей однородной системы (2) Покажем, как найти решение задачи (4)

Пусть Y(x)-фундаментальная матрица системы (2), тогда вектор функция y(x)=Y(x)C-будет общим решением системы (2) произвольные постоянные

Обозначим через C(x)= некоторую неизвестную вектор функцию и решение (4) будем искать в виде

Чтобы найти C(x) подставим (5) в (1)

Получим так как Y-решение матричного уравнения

, то выделенные слагаемые уйдут

Y(x)- всюду невырожденная

неизвестная функция должна быть решением этого уравнения

Проинтегрируем

выберем так, чтобы выполнялось y(x) вида (5) удовлетворяющее начальному условию

подставим: откуда умножая на Y-1(x0) получаем

y(x)=Y(x) (6)

(6)- решение задачи (4), называют формулой Коши

Введем обозначения:

матрица Коши

Получаем

(7)

(7) – решение задачи Коши (4)

Поскольку (7) справедливо при любом начальном значении y(0), то второе слагаемое (7) есть решение неоднородной системы (1) с нулевым начальным условием, а первое слагаемое это решение соответствующей однородной системы (2) с ненулевыми условиями y(0)

Так как общее решение неоднородной системы есть сумма общего однородного и частного неоднородного решений, то , будет общим решением неоднородной системы (1), где C-вектор с произвольными постоянными

13. Линейные дифференциальные уравнения N-ого порядка. Эквивалентность уравнения N-ого порядка системы. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-ого порядка.

(1)

Будем в дальнейшем предполагать, что ai(x), i= определены и непрерывны на

y(x) – неизвестная функция

(2)

Где

Введем обозначение вектор-функции

(3)

….

Дифференцирую равенство:

….

(4)

Уравнение (1) и система (4) – эквивалентны

Начальные условия:

…. (5)

Если функция фи(x)- решение уравнения (1), то вектор функция определенная равенствами (3), будет решением системы (4).

Обратно:

Если вектор функция является решением системы (4), то первая компонента этой вектор функции , будет решением уравнения (1)

Теорема существования и единственности. Пусть ai(x) ,i= и f(x)- определены и непрерывны на интервале x, тогда для любого x0 и для любых

14. Свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений n-ого порядка. Теоремы 1,2,3.

(1)

(2)

Если в уравнении (1) , то уравнение называется линейным однородным, иначе линейным неоднородным.

Будем рассматривать линейное однородное уравнение (3)

(3)

Теорема 1. Если функции решения уравнения (3), то их линейная комбинация так же является решением уравнения (3)

Определение. Функции называются ЛЗ на интервале , если найдутся постоянные , не все = 0, что линейная комбинация , когда . В противном случае ЛНЗ.

Определение. Определителем Вронского построенным по функциям называют следующий определитель

Теорема 2. Если функция ЛЗ на интервале то определитель Вронского, построенный по этим функциям

Теорема 3. Пусть решения уравнения (3), тогда, если W(x)-определитель Вронского построенный по этим решениям обращается в 0 в некоторой точке , то эти решения ЛЗ на

Следствие. Если определитель Вронского, построенный по решениям уравнения (3) обращается в 0 в некоторой точке, то он

Замечание. Если определитель Вронского построенный по некоторым функциям, но эти функции не являются решением уравнения (3) с непрерывными коэффициентами, то они не обязательно могут быть ЛЗ

15. Свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений n-ого порядка. Теоремы 4, 5.

(3)

(4)

Определение. Совокупность n- ЛНЗ решений уравнения (3) называется его фундаментальной системой решений (ФСР)

Теорема 4. ФСР у любого линейного однородного ДУ (3)

Теорема 5. Общее решение линейного однородного ДУ (3) есть линейная комбинация с произвольными постоянными ФСР

16. Теорема Лиувилля. Понижение порядка линейного однородного уравнения.

(1)

Теорема. Пусть некоторое решение уравнения (1) W(x)- определитель Вронского построенный по этим решениям.

Тогда он будет решением уравнения

17. Метод вариации произвольных постоянных для неоднородного уравнения n-ого порядка.

Рассмотри неоднородное уравнение

С помощью замены

…

Сводится к …

Уравнение (1) и система (2) эквивалентны

Общее решение линейного неоднородного уравнения (1) есть сумма общего решения соответствующего линейного однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

Пусть функции образуют ФСР

Тогда вектор функции

Будут ФСР соответствующей линейной однородной системы (2о) (2 уравнение без f(x))

Применим метод вариации произвольных постоянных к системе (2):

Где неизвестные функции

Подставим в систему (2), получим

…

Так как zi(x)-решение соответствующего однородного уравнения, то все выражения в скобке =0, выделенные слагаемые уходят

…

Решив систему (3) найдем

Проинтегрировав, найдем , очевидно что будет решением неоднородного уравнения (1)

18. Линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами, случай простых характеристических чисел. Построение общего вещественного решения

Рассмотрим уравнение вида

Где

решение

P- характеристический множитель

(2)- характеристическое уравнение, а корни (2) называют характеристическими числами уравнения (1)

Из курса линейной алгебры нам известно, что член n-ой степени имеет n-корней с учетом их кратности

Предположим, что (2) имеет n-различных характеристических чисел . Тогда будут различными решениями уравнения (1). Эти решения ЛНЗ

19. Лемма о линейной независимости функций вида

Пусть все попарно различные вещественные или комплексные. Тогда функция вида

*…*

Будет ЛНЗ на любом интервале

20. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, случай кратных характеристических чисел

Пусть k-кратное характеристическое число уравнения (1) тогда

Справедливо тождество

Тождество (4) продифференцируем m раз по

Тогда в левой части получим

Для вычисления правой части воспользуемся формулой Лейбница дифференцируем тогда

Преобразуем правую часть

Справедливо при любых

тождество (5) при , получим в левой части в силу (3) обращаются в 0 при это означает что функция (6) является решениями уравнения (1)

В силу предыдущей леммы решения ЛНЗ, то есть каждому характеристическому числу кратности k ставим в соответствие k ЛНЗ решений вида (6)

Поскольку многочлен степен n в поле комплексных чисел имеет n путей с учетом кратности => получим n решений уравнения (1) в силу Леммы о ЛНЗ =Ю образуют ФСР

Пусть коэффициент ak- вещественное даже с вещественными коэффициентами в поле комплексных чисел n путей => комплексные характеристические числа => пусть

Тогда функции

Будут решениями уравнения (1), их вещественная и мнимая части также будут решениями уравнения (1) то есть решениями будут функции

Вещественные:

Мнимые:

2k таких функций будут решениями уравнения(1), они ЛНЗ, так как предполагая противное и заменяя

Такими равенствами мы бы получили, что были бы ЛНЗ функции при различных xi , а это противоречит Лемме

*,* так как коэффициент ak- вещественный, то так же будет k-кратным характеристическим числом

Также как и в случае простого характеристического числа –не порождает новых ЛНЗ вещественных решений

Паре комплексно- сопряженных k-кратных мы ставим в соответствие ak-вещественных ЛНЗ решений

Для того чтобы построить ФСР уравнения (1) мы ставим в соответствие решение … , простому характеристическому числу, каждой паре простых характеристических чисел, каждому кратному характеристическому числу и каждой паре комплексно-сопряженных характеристических чисел, в результате получаем n вещественных решений уравнения (1), эти решения ЛНЗ, так как предполагая противное и заменяя sin и cos равенством (\*)лучили бы, что были бы ЛЗ функции вида

где xi – различные, что противоречит Лемме

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Будем рассматривать

Соответственный характеристический многочлен

Справедлив принцип …, если

То будет решением уравнения (1)

В случае павой части общего вида частное решение уравнения (1) может быть найдено методом вариации

… правая часть уравнения (1) специального вида то есть она ровна произведению и\или сумме многочленов, . . . . . , sin и cos, то частное решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов

21. Неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Поиск частного решения в нерезонансном случае.

Будем рассматривать:

(1)

Соответственный характеристический многочлен:

Справедлив принцип суперпозиции, если

То будет решением уравнения 1:

В случае правой части общего вида частное решение уравнения (1) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных.

Когда правая часть уравнения (1) специального вида, то есть она равна произведению и\или сумме многочленов, экспоненте, синусов и косинусов, то частное решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов.

Пусть в уравнении (1)

Тогда частное решение уравнения (1) может быть найдено в таком виде:

22. Неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Поиск частного решения в резонансном случае.

(1)

Соответственный характеристический многочлен:

Пусть является к-кратным корнем характеристического многочлена. То есть

Тогда частное решение уравнения (1) существует в виде:

(6)

23. Неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Поиск частного решения в вещественном случае.

(1)

Пусть в уравнении (1) , где - многочлен по х с вещественными коэффициентами, m - целое >=0 и равное максимальной степени многочлена .

Тогда частное решение уравнения (1) существует в виде:

(8)

где - многочлен степени m с неизвестными вещественными коэффициентами, которые находятся подстановкой (8) в (1) и приравниванием коэффициентов при подобных слагаемых. k=0, если не является корнем характеристического многочлена, в противном случае k равняется кратности характеристического числа .

24. Свойства нулей решения дифференциальных уравнений. Лемма 1,2. Следствие.

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка:

(1)

Где функции a(x), b(x) заданы на некотором промежутке.

Будем предполагать, что b(x) – непрерывна, а a(x) – непрерывно дифференцируема и они вещественные функции.

Если решение y(x) имеет более одного нуля, то оно называется колеблющемся на промежутке I. (4)

Лемма 1. Всякий ноль любого нетривиального решений уравнения (4) является простым, то есть если z(x0) = 0, то z’(x0)0

Лемма 2. Нули любого нетривиального решения уравнения (4) не имеют конечных предельных точек на I.

Следствие. Любое нетривиальное решение z(x) уравнения (4) на любом ограниченном промежутке имеет не более конечного числа нулей.

25. Теорема сравнения Штурма. Замечания.  
 (1)

(2)

Теорема Штурма. Пусть для всех . Пусть y(x) какое-то нетривиальное решение уравнения (1), а z(x) какое-то нетривиальное решение уравнения (2)

Если x1,x2 – два последовательных нуля y(x), то есть y(x1)=y(x2)=0, то есть между x1,x2  нет нулей y(x), то найдется хотя бы одна (.)x0 (x1,x2) в которой z(x0 )=0 либо z(x1)=z(x2)=0.

Замечание. Если z(x1)=z(x2)=0, a z(x)0, x (x1,x2), то в этом случае при x [x1,x2] и эти решения ЛЗ. Z(x)=Cy(x), c – const.

Замечание. Если

26. Следствия 1,2,3,4.

(1)

(2)

Следствие 1. Если в уравнении (1) , то всякое нетривиальное решение уравнения (2) имеет не более одного нуля на промежутке I

Следствие 2. Пусть y1(x) и y2(x) - два ЛНЗ решения уравнения (1), тогда если x1, x2 – два последовательных нуля y1 (y1(x1) = y1(x2)=0), то в этом случае y2(x) имеет в точности один ноль внутри. y2(x0)=0 .

Следствие 3. Если некоторое нетривиальное решение уравнения (1) имеет на промежутке I бесконечное число нулей, то тогда любое нетривиальное решение уравнения (1) имеет на I бесконечное число нулей.

Следствие 4. Пусть в уравнении (1) тогда расстояние между соседними нулями любого нетривиального решения уравнения (1) не меньше чем и не больше, то есть расстояние это

27. Решение линейных дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Рассмотрим линейное ДУ 2го порядка:

Y”+a1(x)y’+a2(x)y=0 (1)

Для решения уравнения (1) можно применять метод неопределенных коэффициентов, то есть когда представляются степенными рядами.

Рассмотрим уравнение Эйри:

y’’+xy=0 (2)

будем искать решение этого уравнения в виде степенного ряда

=> подставим в уравнение

По признаку Даламберу, ряды (3) и (4) сходятся при всех и их можно дифференцировать => являются решениями уравнения (2) и они ЛНЗ, для этого рассмотрим определитель Вронского, построенный по этим функциям.

А поэтому общим решением уравнения (2) будет:

28. Зависимость решения от начальных значений и параметров. Лемма Адамара.

Заметим, что изучение зависимости решения ДУ от начального значения можно свести к исследованию решения ДУ от параметров, входящих в правую часть.

Решение задачи (1),(2) обозначим: и введем новую неизвестную функцию и независимую переменную

Тогда когда

=> Новая функция

Подставим

Справедливо и обратное, изучение зависимости решения от параметров в правой части можно свести к изучению решения зависимости от начальных условий.

Лемма Адамара. Рассмотрим в пространстве область

Определение. Область G называется выпуклой по переменным если каковы бы ни были 2 точки , весь отрезок, соединяющий эти точки также принадлежат области G.

Лемма: пусть функция имеет в некоторой выпуклой по переменным области непрерывные производные до p-го порядка включительно, тогда найдется n-функций имеющих непрерывные производные по до (p-1)-го порядка включительно, что справедливо равенство:

29. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений от параметров.

Будем рассматривать задачу Коши для следующего ДУ:

Теорема о зависимости решений от параметра:

1. Если функция непрерывна, ограничена в G по совокупности всех своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица: где k=const,не зависит от , то располагаются внутри следующим образом , содержащий внутри, на котором решение задачи (1),(2) непрерывно по совокупности переменных .
2. Если и ее производные до p-го порядка включительно, по непрерывны по совокупности в G и ограничены, то решение задачи (1) имеет по параметрам непрерывные производные по совокупности переменных до p-го порядка включительно, когда